PROSTOTA $\mathrm{C}^*_{\mathbf{r}}(\mathbb{F}_2)$

ABSTRAKT. Omawiamy dowód prostoty zredukowanej C*-algebry grupowej grupy wolnej o dwóch generatorach z pracy Robert T. Powers: Simplicity of the C*-algebra associated with the free group on two generators. *Duke Math. J.* **42** (1975), 151–156.

1. Grupa wolna o dwóch generatorach i algebra $\mathrm{C}^*_{\mathrm{R}}(\mathbb{F}_2)$

Generatory grupy wolnej będziemy oznaczać literami a i b. elementami $\mathbb{F}_2$ są *słowa*, tj. wyrażenia postaci

$$a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2}\cdots a^{n_r}b^{m_r}, \tag{1.1}$$

gdzie $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ i $n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$ oraz słowo puste, które będziemy oznaczać symbolem e. Powiemy, że słowo (1.1) jest w postaci *zredukowanej*, jeśli $n_2, \dots, n_r \neq 0$ i $m_1, \dots, m_{r-1} \neq 0$.

Niech $\mathscr{H} = \ell_2(\mathbb{F}_2)$ i rozważmy *lewą regularną* reprezentację $\lambda : \mathbb{F}_2 \to \mathrm{B}(\mathscr{H})$

$$\big(\lambda(t)\psi\big)(s) = \psi(t^{-1}s), \qquad \psi \in \mathscr{H},\ t, s \in \mathbb{F}_2.$$

Jest to oczywiście reprezentacja unitarna. Odwzorowanie λ rozszerza się do $*$-reprezentacji algebry grupowej grupy $\mathbb{F}_2$:

$$\mathbb{C}[\mathbb{F}_2] \ni \sum \alpha_i t_i \longmapsto \sum \alpha_i \lambda(t_i) \in \mathrm{B}(\mathscr{H}).$$

Symbolem $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$ oznaczamy domknięcie obrazu tej reprezentacji, tj. C*-algebrę operatorów na $\mathscr{H}$ generowaną przez

$$\big\{\lambda(t) \,\big|\, t \in \mathbb{F}_2\big\}. \tag{1.2}$$

Definiujemy stan τ na $\mathrm{C}^*_r(\mathbb{F}_2)$ kładąc

$$\tau(x) = \langle \delta_e \,|\, x\delta_e \rangle\,, \qquad x \in \mathrm{C}^*_r(\mathbb{F}_2).$$

Stwierdzenie. *Stan τ jest śladowy i wierny.*

Dowód. Łatwo się przekonać, że dla operatora x będącego kombinacją liniową elementów układu (1.2) (tj. $x \in \lambda(\mathbb{C}[\mathbb{F}_2])$) wartość $\tau(x)$ jest równa współczynnikowi przy $\lambda(e) = \mathbb{1}$. Stąd jeśli

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(t_i), \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \lambda(s_i).$$

gdzie

$$S = \big\{(i,j) \,\big|\, t_i s_j = e\big\}, \quad S' = \big\{(j,i) \,\big|\, s_j t_i = e\big\}.$$

Oczywiście $(i,j) \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(j,i) \in S'$, a więc

$$\tau(xy) = \tau(yx). \tag{1.3}$$

Stan τ jest ciągłym odwzorowaniem $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2) \to \mathbb{C}$, a zbiór $\lambda\big(\mathbb{C}[\mathbb{F}_2]\big)$ jest gęsty w $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$ i mnożenie jest operacją ciągłą. Stąd otrzymujemy (1.3) dla wszystkich $x, y \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$.

Przejdźmy teraz do dowodu wierności τ. Niech $x \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$ spełnia $\tau(x^*x) = 0$. Wówczas z nierówności Schwarza dla τ otrzymujemy

$$\big|\tau({y_1}^* x y_2)\big| = \big|\tau(y_2 {y_1}^* x)\big| = \big|\tau\big((y_2{y_2}^*)^* x\big)\big| \leq \tau\big((y_2{y_2}^*)^*(y_2{y_2}^*)\big)\tau(x^*x) = 0,$$

a więc

$$\langle y_1\delta_e | x y_2\delta_e\rangle = 0, \qquad y_1, y_2 \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2),$$

a ponieważ zbiór $\big\{y\delta_e \,\big|\, y \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)\big\}$ jest gęsty w $\mathscr{H}$, otrzymujemy $x = 0$. □

2. Prostota $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$

Główne twierdzenie.

(1) *Algebra* $\mathrm{C}^*_r(\mathbb{F}_2)$ *jest prosta,*
(2) τ *jest jedynym stanem śladowym na* $\mathrm{C}^*_r(\mathbb{F}_2)$.

Główne twierdzenie wynika natychmiast z następującego:

Twierdzenie pomocnicze. *Dla każdego samosprzężonego* $x \in \mathrm{C}^*_r(\mathbb{F}_2)$ *i dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieją elementy* $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}_2$ *oraz liczby* $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ *takie, że* $\sum \mu_i = 1$ *i*

$$\left\| \tau(x)\mathbb{1} - \sum \mu_i \lambda(g_i) x \lambda(g_i)^* \right\| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Zakładając na razie prawdziwość twierdzenia pomocniczego możemy udowodnić główne twierdzenie.

Dowód głównego twierdzenia. Niech J będzie domkniętym niezerowym ideałem w $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$ i wybierzmy niezerowy $y \in \mathsf{J}$. Jako że stan τ jest wierny, mamy $\tau(y^*y) > 0$. Połóżmy $x = \frac{1}{\tau(y^*y)} y^*y$. Wtedy $x \in \mathsf{J}$, $x = x^*$ i $\tau(x) = 1$. Możemy zatem użyć twierdzenia pomocniczego dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$, by otrzymać

$$\left\| \mathbb{1} - \sum \mu_i \lambda(g_i) x \lambda(g_i)^* \right\| = \left\| \tau(x)\mathbb{1} - \sum \mu_i \lambda(g_i) x \lambda(g_i)^* \right\| < \tfrac{1}{2}.$$

dla pewnych $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{F}_2$ i liczb $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Ale element $z = \sum \mu_i \lambda(g_i) x \lambda(g_i)^*$ należy do J, a skoro $\|\mathbb{1} - z\| < \frac{1}{2}$, jest on odwracalny. Stąd $\mathsf{J} = \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$.

Teraz niech θ będzie stanem śladowym na $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$. Dla dowolnego samosprzężonego $x \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$ i $\varepsilon > 0$ wybierzmy (zgodnie z twierdzeniem pomocniczym) elementy $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}_2$ i liczby $\mu_1, \ldots, \mu_n$ takie, że $\sum \mu_i = 1$ i zachodzi (2.1). Wtedy

$$\big|\tau(x) - \theta(x)\big| = \left|\theta\left(\tau(x)\mathbb{1} - \sum \mu_i \lambda(g_i) x \lambda(g_i)^*\right)\right| \leq \left\| \tau(x)\mathbb{1} - \sum \mu_i \lambda(g_i) x \lambda(g_i)^* \right\| < \varepsilon.$$

W konsekwencji $\theta = \tau$. □

3. Lematy

Lemat 1. *Niech $x \in \mathrm{B}(\mathscr{H})$ będzie samosprzężony i niech $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}$ będzie domkniętą podprzestrzenią taką, że $x\mathscr{M}^\perp \subset \mathscr{M}$. Niech p będzie rzutem ortogonalnym na $\mathscr{M}$. Wówczas dla każdego $\psi \in \mathscr{H}$ mamy*

$$\big|\langle\psi|x\psi\rangle\big| \leq \|x\|\big(\|p\psi\|^2 + 2\|p\psi\|\|(\mathbb{1}-p)\psi\|\big).$$

Dowód. Obliczamy

$$\begin{aligned}\big|\langle\psi|x\psi\rangle\big| &= \big|\big\langle\big(p+(\mathbb{1}-p)\big)\psi|x\big(p+(\mathbb{1}-p)\big)\psi\big\rangle\big| \\ &= \big|\langle p\psi|xp\psi\rangle + \langle(\mathbb{1}-p)\psi|xp\psi\rangle + \langle p\psi|x(\mathbb{1}-p)\psi\rangle + \langle(\mathbb{1}-p)\psi|x(\mathbb{1}-p)\psi\rangle\big| \\ &= \big|\langle p\psi|xp\psi\rangle + 2\operatorname{Re}\langle p\psi|x(\mathbb{1}-p)\psi\rangle + \langle(\mathbb{1}-p)\psi|x(\mathbb{1}-p)\psi\rangle\big|.\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyraz $\langle(\mathbb{1}-p)\psi|x(\mathbb{1}-p)\psi\rangle$ jest równy zero, gdyż $x\mathscr{M}^\perp \subset \mathscr{M}$, a więc

$$\begin{aligned}\big|\langle\psi|x\psi\rangle\big| &= \big|\langle p\psi|xp\psi\rangle + 2\operatorname{Re}\langle p\psi|x(\mathbb{1}-p)\psi\rangle\big| \\ &\leq \big|\langle p\psi|xp\psi\rangle\big| + 2\big|\langle p\psi|x(\mathbb{1}-p)\psi\rangle\big| \\ &\leq \|x\|\|p\psi\|^2 + 2\|x\|\|p\psi\|\|(\mathbb{1}-p)\psi\|.\end{aligned}$$

□

Lemat 2. *Niech $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e\}$. Wówczas istnieje $r \in \mathbb{Z}$ takie, że słowa*

$$b^r s_1 b^{-r}, \ldots, b^r s_m b^{-r} \tag{3.1}$$

w formie zredukowanej zaczynają się i kończą niezerową potęgą b.

Dowód. Dla $s \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e\}$ niech $\mathsf{l}_b(s)$oznacza potęgę b na początku słowa s (w formie zredukowanej), a $\mathsf{r}_b(s)$ niech oznacza potęgę b na końcu słowa s (przykłady: $\mathsf{l}_b(b^2ab) = 2$, $\mathsf{l}_b(ab^2) = 0$, $\mathsf{l}_b(b^{-3}a) = -3$, $\mathsf{r}_b(a^2b^3) = 3$, $\mathsf{r}_b(b^2a^3) = 0$, $\mathsf{r}_b(ab^{-2}) = -2$ itp.). Jeśli s nie zawiera niezerowej potęgi a, czyli $s = b^p$ dla pewnego $p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, to dla każdego r słowo $b^s t b^{-r}$ zaczyna się i kończy niezerową potęga b (konkretnie b^p). Z kolei jeśli s zawiera niezerową potęgę a, to

$$\begin{aligned}\mathsf{l}_b(b^s t b^{-r}) &= \mathsf{l}_b(s) + r, \\ \mathsf{r}_b(b^r s b^{-r}) &= \mathsf{r}_b(s) - r.\end{aligned}$$

Tak więc wybierając

$$r > \max\big\{-\mathsf{l}_b(s_1), \ldots, -\mathsf{l}_b(s_m), \mathsf{r}_b(s_1), \ldots, \mathsf{r}_b(s_m)\big\}$$

otrzymujemy wykładnik r taki, że słowa (3.1) zaczynają się i kończą niezerową potęgą b. □

Lemat 3. *Niech $x = \sum_{i=1}^{m}\big(\alpha_i\lambda(s_i) + \overline{\alpha_i}\lambda(s_i)^*\big)$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ i $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e\}$. Wówczas istnieją $t_1, \ldots, t_{20} \in \mathbb{F}_2$ takie, że*

$$\left\|\tfrac{1}{20}\sum_{j=0}^{20}\lambda(t_j)x\lambda(t_j)^*\right\| \leq \tfrac{39}{40}\|x\|.$$

Dowód. Mamy oczywiście $x = x^*$. Z lematu 2. wiemy, że istnieje $r \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$b^r s_1 b^{-r}, \dots, b^r s_m b^{-r}$$

zaczynają się i kończą niezerową potęgą b. Połóżmy

$$t_j = a^j b^r, \qquad j = 1, \dots, 20.$$

Wówczas dla każdego i słowo $t_j s_i t_j^{-1} = a^j b^r s_i b^{-r} a^{-j}$ zaczyna się od a^j, a kończy na a^{-j}.

Niech $\mathscr{M}_j = \big\{\psi \in \mathscr{H} \,\big|\, \operatorname{supp}\psi \subset \{u \,|\, u \text{ zaczyna się od } a^j\}\big\}$. Wówczas dla każdego i mamy $\lambda(t_j s_i t_j^{-1})\mathscr{M}_j^{\perp} \subset \mathscr{M}_j$. Istotnie: dla $\psi \in \mathscr{M}_j^{\perp}$ wielkość

$$\big(\lambda(t_j s_i t_j^{-1})\psi\big)(v) = \psi(t_j s_i^{-1} t_j^{-1} v)$$

może być niezerowa jedynie, gdy $v = t_j s_i t_j^{-1} w$ dla pewnego w niezaczynającego się od a^j. W szczególności v musi zaczynać się od a^j. Analogicznie pokazujemy, że $\lambda(t_j s_i t_j^{-1})^* \mathscr{M}_j^{\perp} \subset \mathscr{M}_j$.

W konsekwencji operator

$$\lambda(t_j) x \lambda(t_j)^* = \sum_{i=1}^{m} \big(\alpha_i \lambda(t_j s_i t_j^{-1}) + \overline{\alpha_i} \lambda(t_j s_i t_j^{-1})^*\big)$$

Przeprowadza $\mathscr{M}_j^{\perp}$ w $\mathscr{M}_j$.

Niech p_j oznacza rzut ortogonalny na $\mathscr{M}_j$. Zauważmy, że rzuty $p_1, \dots, p_{20}$ są parami ortogonalne. Teraz niech $y = \frac{1}{20} \sum_{j=0}^{20} \lambda(t_j) x \lambda(t_j)^*$. Aby wykazać, że $\|y\| \leq \frac{39}{40}\|x\|$ weźmy $\psi \in \mathscr{H}$ o normie 1. Mamy

$$\sum_{j=1}^{20} \|p_j \psi\|^2 \leq \|\psi\|^2,$$

a więc istnieje $k \in \{1, \dots, 20\}$ takie, że $\|p_k\psi\|^2 \leq \frac{1}{20}$. Tak więc

$$\begin{aligned}
\big|\langle\psi|y\psi\rangle\big| &= \left|\tfrac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} \langle\psi|\lambda(t_j) x \lambda(t_j)^*\psi\rangle\right| \\
&\leq \tfrac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} \big|\langle\psi|\lambda(t_j) x \lambda(t_j)^*\psi\rangle\big| \\
&\leq \tfrac{1}{20} \sum_{j\neq k} \big|\langle\psi|\lambda(t_j) x \lambda(t_j)^*\psi\rangle\big| + \tfrac{1}{20}\big|\langle\psi|\lambda(t_k) x \lambda(t_k)^*\psi\rangle\big| \\
&\leq \tfrac{19}{20}\|x\| + \tfrac{1}{20}\big|\langle\psi|\lambda(t_k) x \lambda(t_k)^*\psi\rangle\big|.
\end{aligned}$$

Na mocy lematu 1. mamy

$$\begin{aligned}
\big|\langle\psi|\lambda(t_k) x \lambda(t_k)^*\psi\rangle\big| &\leq \|x\|\big(\underbrace{\|p_k\psi\|^2}_{\leq \frac{1}{20}} + 2\underbrace{\|p_k\psi\|}_{\leq \frac{1}{\sqrt{20}}}\underbrace{\|(\mathbb{1} - p_k)\psi\|}_{\leq 1}\big) \\
&\leq \|x\|\big(\tfrac{1}{20} + \tfrac{2}{\sqrt{20}}\big) < \tfrac{\|x\|}{2}.
\end{aligned}$$

Tak więc dla dowolnego $\psi \in \mathscr{H}$ o normie 1 mamy

$$\big|\langle\psi|y\psi\rangle\big| \leq \tfrac{19}{20}\|x\| + \tfrac{1}{20}\tfrac{\|x\|}{2} = \tfrac{39}{40}\|x\|,$$

a skoro $y = y^*$, mamy

$$\|y\| = \sup_{\|\psi\|=1} \big|\langle\psi|y\psi\rangle\big| \leq \tfrac{39}{40}\|x\|.$$

□

4. Dowód twierdzenia pomocniczego

Symbolem $\mathscr{A}$ oznaczmy klasę odwzorowań $\Phi : \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$ postaci

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda(t_i) x \lambda(t_i)^*, \qquad x \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$$

dla pewnych $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{F}_2$ i $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ takich że $\sum \mu_i = 1$. Łatwo się przekonać, że

- dla każdego $\Phi \in \mathscr{A}$ mamy $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$,
- wszystkie $\Phi \in \mathscr{A}$ są odwzorowaniami dodatnimi (w szczególności dla samosprzężonego $x \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$ operator $\Phi(x)$ jest samosprzężony),
- wszystkie $\Phi \in \mathscr{A}$ są kontrakcjami (a nawet $\|\Phi\| = 1$),
- dla $\Phi, \Psi \in \mathscr{A}$ mamy $\Phi \circ \Psi \in \mathscr{A}$.

Dowód twierdzenia pomocniczego. Na początek weźmy samosprzężony $x \in \lambda(\mathbb{C}[\mathbb{F}_2])$ (tj. x jest kombinacją liniową operatorów (1.2)) i ustalmy $\varepsilon > 0$. Wiemy, że $\tau(x)$ jest współczynnikiem przy $\lambda(e) = \mathbb{1}$, a zatem $\tau(x)\mathbb{1} - x$ możemy zapisać w postaci

$$\tau(x)\mathbb{1} - x = \sum_{i=1}^{m} \big(\alpha_i \lambda(s_i) + \overline{\alpha_i}\lambda(s_i)^*\big),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ i $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e\}$.

Na mocy lematu 3. istnieje $\Psi_1 \in \mathscr{A}$ postaci

$$\Psi_1(z) = \tfrac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} \lambda(t_j) z \lambda(t_j)^*, \qquad z \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$$

takie, że

$$\big\|\tau(x)\mathbb{1} - \Psi_1(x)\big\| = \big\|\Psi_1\big(\tau(x)\mathbb{1} - x\big)\big\| \leq \tfrac{39}{40}\big\|\tau(x)\mathbb{1} - x\big\|.$$

Teraz niech $x_1 = \tau(x)\mathbb{1} - \Psi_1(x)$. Wtedy $x_1 \in \lambda(\mathbb{C}[\mathbb{F}_2])$, $x_1 = {x_1}^*$ i $\tau(x_1) = 0$. Możemy zatem ponownie skorzystać z lematu 3. by otrzymać $\Psi_2 \in \mathscr{A}$ takie, że

$$\big\|\tau(x)\mathbb{1} - \Psi_2\big(\Psi_1(x)\big)\big\| = \big\|\Psi_2(x_1)\big\| \leq \tfrac{39}{40}\|x_1\| \leq \big(\tfrac{39}{40}\big)^2\big\|\tau(x)\mathbb{1} - x\big\|.$$

Podobnie kładąc $x_2 = \Psi_2(x_1)$ otrzymujemy samosprzężony element $x_2 \in \lambda(\mathbb{C}[\mathbb{F}_2])$ o śladzie zero, a więc istnieje $\Psi_3 \in \mathscr{A}$ takie, że

$$\big\|\tau(x)\mathbb{1} - \Psi_3\big(\Psi_2(\Psi_1(x))\big)\big\| = \big\|\Psi_3(x_2)\big\| \leq \tfrac{39}{40}\|x_2\| \leq \big(\tfrac{39}{40}\big)^3\big\|\tau(x)\mathbb{1} - x\big\|.$$

Kontynuując tę procedurę otrzymujemy ciąg $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathscr{A}$ taki, że dla

$$\Phi_n = \Psi_n \circ \Psi_{n-1} \circ \cdots \circ \Psi_1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

mamy

$$\big\|\tau(x)\mathbb{1} - \Phi_n(x)\big\| \leq \left(\tfrac{39}{40}\right)^n \big\|\tau(x)\mathbb{1} - x\big\|.$$

Wybierając N tak duże, że $\left(\tfrac{39}{40}\right)^N \big\|\tau(x)\mathbb{1} - x\big\| < \varepsilon$ otrzymujemy

$$\big\|\tau(x)\mathbb{1} - \Phi_N(x)\big\| < \varepsilon,$$

przy czym

$$\Phi_N(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda(g_i) x \lambda(g_i)^*$$

dla pewnych $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}_2$ oraz liczb $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ takich, że $\sum \mu_i = 1$.

Teraz niech x będzie dowolnym samosprzężonym elementem $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$. Wówczas istnieje samosprzężony $y \in \lambda(\mathbb{C}[\mathbb{F}_2])$ taki, że $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dalej, na mocy pierwszej części dowodu istnieją $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}_2$ i liczby $\mu_1 \, dotsc, \mu_n > 0$ takie, że $\sum \mu_i = 1$ i

$$\left\|\tau(y)\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda(g_i) y \lambda(g_i)^*\right\| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Oznaczając

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda(g_i) z \lambda(g_i)^*, \qquad z \in \mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}_2)$$

szacujemy

$$\big\|\tau(x)\mathbb{1} - \Phi(x)\big\| \leq \|\tau(x)\mathbb{1} - \tau(y)\mathbb{1}\| + \big\|\tau(y)\mathbb{1} - \Phi(y)\big\| + \big\|\Phi(y) - \Phi(x)\big\| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□